УДК 514 + 531

А. И. Долгарев

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКИ ПО ФУНКЦИЯМ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ

Аннотация. Описано получение уравнений траектории движения точки по касательному и нормальному ускорению. Использованы методы 3-мерной геометрии Галилея.

Ключевые слова: методы геометрии Галилея, тангенциальное и нормальное ускорение.

Abstract. Are described obtaining a equations of trajectory motion point by tangential and normal acceleration. Are use methods of geometry 3D Galilean space-time.

Keyword: methods of Galilean geometry; tangential and normal acceleration.

Движение материальной точки считается заданным, если известен способ определения положения точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета, т.е. известен закон кинетического движения [1, с. 115]. Рассматриваем движение точки с двумя степенями свободы – движение в плоскости. Считаем, что в плоскости задана система отсчета Oxy репером $\mathbf{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, точка O – начало отсчета; $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы, координатные оси таковы: $Ox = < O, \vec{i} >$, $Oy = < O, \vec{j} >$; каждая ось задается началом отсчета и базисным вектором. Положение материальной точки M в системе отсчета Oxy определяется ее координатами x и y: $M = (x, y)$; имеется разложение вектора $\overrightarrow{OM}$ по векторам базиса $\mathbf{Б} = (\vec{i}, \vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} ;$$

Б – базис векторного пространства плоскости.

Если точка M движется, т.е. изменяется ее положение во времени, то координаты точки являются функциями времени

$$x = x(t),\ y = y(t) ; \qquad (1)$$

время t изменяется в некотором интервале $\mathbf{I} = [t_0, t_1]$, принадлежащем оси времени **R**, которая совпадает с множеством действительных чисел.

Вектор $\vec{r}(t)$ определяет положение точки $M(t) = (x(t), y(t))$ на плоскости Oxy. Координаты вектора $\vec{r}(t)$ в базисе **Б** совпадают с координатами точки $M(t)$ в репере **В**:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I ; \qquad (2)$$

в разложении по базису **Б**:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} .$$

Функции (1) задают кинематический закон движения точки, являются параметрическими уравнениями движения точки M в декартовых прямоугольных координатах [1, с. 116]; величина t называется параметром точки $M(t)$; всякое значение t из интервала **I** однозначно определяет положение точки $M(t)$. Линия (2) на плоскости $<O,\vec{i},\vec{j}>$, заданная уравнениями (1), называется траекторий движения точки M; (2) есть векторное задание траектории движения и (1) называются уравнениями траектории точки M. Это координатное задание движения точки.

Рассматривая момент времени t и положение точки $M(t)$ в этот момент времени, мы имеем упорядоченную тройку величин

$$(t, x(t), y(t))\ ;$$

а в каждый фиксированный момент времени $t = t_0$ имеем тройку чисел $(t_0, x(t_0), y(t_0))$. Всевозможные тройки чисел (t, x, y) заполняют 3-мерное пространство. Смысл первой компоненты t троек есть время; вторая и третья компоненты троек имеют пространственный смысл. Имеется 3-мерное пространство-время с 1-мерным временем. Такое пространство-время с 1-мерной осью времени **R**, пространственной составляющей которого является евклидова плоскость $\mathbf{E}^2$, называется пространством-временем Галилея и обозначается $\mathbf{\Gamma}^3$; оно является прямой суммой оси времени **R** и евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$:

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \mathbf{R} + \mathbf{E}^2\ .$$

В описании пространства-времени Галилея используется [2].

Точки (t, x, y) пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ называются еще событиями. Двигаясь во времени, точка (t, x, y) заполняет некоторую линию, она называется мировой линией события (t, x, y). Если известно положение $(x(t), y(t))$ точки в каждый момент времени t, то тем самым определяется галилеева векторная функция

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t))\ , \tag{3}$$

это векторное задание мировой линии движущейся точки $M = (x, y)$.

Проекция мировой линии $\gamma(t)$ на евклидову плоскость $\mathbf{E}^2$, т.е. на плоскость Oxy, является траекторией (2) движения точки M и дает закон движения точки по траектории.

Единичный вектор направления времени обозначаем $\vec{e}$. В пространстве-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ имеем репер $\mathbf{B} = (O, \vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$. Пусть $P = P(t)$ – произвольная точка мировой линии $\gamma(t)$, ее координаты в репере **B**:

$$P(t) = (t, x(t), y(t))\ .$$

Имеется однозначное разложение вектора $\gamma(t) = \overrightarrow{OP}$ по базису $\mathbf{Б} = (\vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\gamma(t) = t\vec{e} + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = t\vec{e} + \vec{r}(t)\ .$$

Слагаемое $t\vec{e}$ является временной составляющей мировой линии движения материальной точки $M(x,y)$, сумма $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ является пространственной составляющей мировой линии движения точки; таким образом, траектория движущейся точки есть пространственная составляющая мировой линии движения точки. Вместе с тем получается закон движения точки, так как параметром траектории точки является время.

Производная $\dot{\gamma}(t)$ галилеевой векторной функции $\gamma(t)$ по времени такова:

$$\tau=\dot{\gamma}(t)=\vec{e}+\dot{\vec{r}}(t)=\vec{e}+(\dot{x}(t),\dot{y}(t))=(1,\dot{x}(t),\dot{y}(t)),$$

это галилеев вектор единичной длины (см. ниже п. 1.1), его модуль постоянен и не зависит от времени, т.е. время вдоль кривой течет равномерно. Евклидов вектор

$$\dot{\vec{r}}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t))=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}(t)=\vec{v} \tag{4}$$

есть вектор скорости движения точки по ее траектории, величина скорости равна

$$v=\|\vec{v}\|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,. \tag{5}$$

Имеется зависимость между вектором касательной к мировой линии движения точки и вектором касательной к траектории движения точки:

$$\tau=\vec{e}+\vec{v}\,.$$

Вектор ускорения движения равен производной по времени вектора скорости:

$$\vec{a}=\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}(t)=(\ddot{x}(t),\ddot{y}(t))=\ddot{\vec{r}}\,, \tag{6}$$

это евклидов вектор. Величина ускорения равна

$$a=\|\vec{a}\|=\|\ddot{\vec{r}}\|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\,. \tag{7}$$

Траектория $\vec{r}(t)$ движущейся точки лежит в евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$. В этой же плоскости лежит единичный вектор нормали $\vec{n}$ траектории движения. Вектор ускорения $\vec{a}(t)$ однозначно разлагается по взаимно перпендикулярным единичным векторам $\vec{t}$ и $\vec{n}$, где $\vec{t}=\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\dfrac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|}$ – единичный вектор касательной к траектории:

$$\vec{a}(t)=a_t(t)\,\vec{t}+a_n(t)\,\vec{n}\,, \tag{8}$$

величина $a_t(t)$ называется касательным (тангенциальным) ускорением точки, величина $a_n(t)$ называется нормальным ускорением точки. Из механики известно:

$$a_t(t)=\frac{dv}{dt},\ a_n(t)=k^e v^2, \tag{9}$$

см., например, [1, с. 130–131]; k^e – кривизна евклидовой кривой $\vec{r}(t)$,

$$k^e=\frac{\dot{x}\ \ddot{y}-\dot{y}\ \ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Разложение (8) существует и для координатного задания траектории, а не только для задания в естественной форме $\vec{r}(s)$, где естественный параметр s точки есть длина пройденного точкой пути по траектории движения от некоторого начального положения.

Геометрические свойства пространства-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ изучает геометрия Галилея. Она рассматривает, в частности, и свойства мировых линий движений материальных точек. Основы геометрии Галилея 3-мерного пространства содержатся в [3]. Приведем из [3] необходимые сведения.

1. Кривые 3-мерного пространства Галилея

1.1. Пространство-время Галилея

Основой пространства-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ является аффинное пространство $\mathbf{A}^3$, [2]. Векторы пространства $\mathbf{A}^3$ записываются с выделением первой компоненты в виде $\vec{x}=(x,x^1,x^2)$. Скалярным произведением векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}=(y,y^1,y^2)$ по [3] называется число $\vec{x}\ \vec{y}$, определяемое равенствами

$$\vec{x}\ \vec{y}=\begin{cases} xy, \text{ если } x\neq 0, \text{ или } y\neq 0; \\ x^1y^1+x^2y^2, \text{ если } x=y=0. \end{cases}$$

Скалярный квадрат вектора $\vec{x}$ равен

$$\vec{x}^2=x^2, \text{ если } x\neq 0 \text{ и } \vec{x}^2=(x^1)^2+(x^2)^2, \text{ если } x=0.$$

Галилеева норма $\|\vec{x}\|$ вектора $\vec{x}$ определяется на основе скалярного квадрата вектора:

$$\|\vec{x}\|=\begin{cases} |x|, \text{ если } x\neq 0; \\ \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}, \text{ если } x=0. \end{cases}$$

Первая компонента x вектора $\vec{x}$ является временной, компоненты x^1, x^2 – пространственные. Векторы $(0,x^1,x^2)$ имеют евклидову норму. Если $x\neq 0$, то векторы (x,x^1,x^2) называются галилеевыми, их обозначение $\gamma=(x,x^1,x^2)$; а векторы $(0,x^1,x^2)$ называются евклидовыми и записываются в виде $\vec{r}=(x^1,x^2)$. Всякий галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору.

Аффинное пространство $\mathbf{A}^3$, в линейном пространстве которого определена галилеева норма векторов, называется пространством Галилея и обозначается $\mathbf{Г}^3$. Две точки $A=(a,a^1,a^2)$ и $B=(b,b^1,b^2)$ пространства Галилея определяют вектор

$$\overrightarrow{AB}=(b-a,b^1-a^1,b^2-a^2);$$

расстояние $|AB|$ между точками равно норме вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|AB|=\begin{cases}|b-a|, \text{если } b\neq a;\\ \sqrt{(b^1-a^1)^2+(b^2-a^2)^2}, \text{если } b=a.\end{cases}$$

Точки пространства Галилея еще называются событиями. Множество всех событий совпадает с $\mathbf{Г}^3$ и называется миром. События A и B одновременны, если $a=b$. Одновременные между собой события составляют в пространстве Галилея $\mathbf{Г}^3$ евклидову плоскость $\mathbf{E}^2$. Репер пространства Галилея есть $\mathbf{B}=(O,\vec{e},\vec{i},\vec{j})$. Точка O и евклидовы векторы $\vec{i},\vec{j}$ образуют евклидову плоскость $\mathbf{E}^2=<O,\vec{i},\vec{j}>$. Через всякую точку P пространства $\mathbf{Г}^3$ проходит единственная евклидова плоскость $<P,\vec{i},\vec{j}>$.

1.2. Кривая пространства Галилея в естественной параметризации

Кривые пространства $\mathbf{Г}^3$ изучаются в [3]. Регулярная кривая класса C^3 3-мерного пространства Галилея $\mathbf{Г}^3$ в естественной параметризации задается галилеевой векторной функцией (3):

$$\gamma(t)=(t,x(t),y(t)),\ t\in\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R},$$

или в разложении по базисным векторам репера $\mathbf{B}=(O,\vec{e},\vec{i},\vec{j})$:

$$\gamma(t)=t\vec{e}+x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}. \qquad (10)$$

Вектор (2) $\vec{r}(t)$ является вектором евклидовой плоскости $<O,\vec{i},\vec{j}>$ пространства Галилея. Кривая $\vec{r}(t)$ – это проекция галилеевой кривой $\gamma(t)$ (3) на евклидову плоскость $<O,\vec{i},\vec{j}>$. Разложение (10) можно записать в виде

$$\gamma(t)=t\vec{e}+\vec{r}(t). \qquad (11)$$

Вектор касательной к кривой (3) равен

$$\dot{\gamma}(t)=(1,\dot{x}(t),\dot{y}(t)). \qquad (12)$$

Это галилеев вектор, его длина равна 1: $\|\dot{\gamma}\|=\|\dot{\gamma}(t)\|=1$, см. галилееву норму векторов в п. 1.1. Кривизна кривой (3) вычисляется по формуле

$$k=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\geq 0; \qquad (13)$$

кручение кривой (3) – по формуле

$$m=\frac{\ddot{x}\quad\dddot{y}-\dddot{x}\quad\ddot{y}}{k^2}. \qquad (14)$$

Функции кривизны и кручения кривой

$$k = k(t) \geq 0 \,,\ m = m(t) \tag{15}$$

являются натуральными уравнениями кривой (3).

Функции кривизны и кручения (15) кривой связаны формулами (13), (14) с пространственными компонентами (1) $x = x(t), y = y(t)$ кривой (3); имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = k^2(t), \\ \ddot{x}\dddot{y} - \dddot{x}\ddot{y} = m(t)k^2(t). \end{cases} \tag{16}$$

Если заданы функции (15), то функции (1) $x = x(t), y = y(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (16). Частный случай системы дифференциальных уравнений (16) при $k = \text{const}$, $m = \text{const}$ решается в [3].

1.3. Отыскание мировой линии движения по полю ускорения движения точки

Задано поле ускорения движущейся точки:

$$\vec{a}(t) = (a^1(t), a^2(t)) \,.$$

Требуется написать уравнения (1) траектории движения. Это задача И. Ньютона для движения с двумя степенями свободы, решенная в [4]. Траектория движения есть функция (2) $\vec{r}(t)$. По ней однозначно получается мировая линия движения (11) $\gamma(t) = t\vec{e} + \vec{r}(t)$. По смыслу задания поля ускорения движения точки имеем

$$a^1 = \ddot{x}, \quad a^2 = \ddot{y} \,;\ k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \,,$$

где k – кривизна мировой линии движения точки.

По заданным функциям $a^1(t), a^2(t)$ отыскиваются производные $\dddot{x}, \dddot{y}$ и кручение (14) m мировой линии движения. Функции (1) $x = x(t), y = y(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (16). Приведем схему решения системы уравнений (16) из [4].

В результате обозначений

$$\ddot{x} = u, \ddot{y} = v \tag{17}$$

понижается порядок дифференциальных уравнений системы (16):

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = k^2, \\ u\dot{v} - \dot{u}v = mk^2. \end{cases} \tag{18}$$

По виду первого уравнения системы (18) вводим обозначения:

$$u = k\cos(w + c) \,,\ v = k\sin(w + c) \,, \tag{19}$$

где

$$w = w(t) = \int m(t)dt + c \,,\ c = \text{const} \,. \tag{20}$$

Функции (19) с функцией (20) удовлетворяют второму уравнению системы (18). Уравнения (17) принимают вид

$$\ddot{x} = k\cos(w+c)\,,\ \ \ddot{y} = k\sin(w+c)\,. \tag{21}$$

После двукратного интегрирования этих уравнений находим компоненты (1) $x(t), y(t)$ функции (3), задающей кривую пространства Галилея $\mathbf{Г}^3$ – мировую линию движения, а также траекторию (2). Начальные условия системы уравнений (16) определяют единственную траекторию (2) по заданному полю ускорений $\vec{a}(t) = (a^1(t), a^2(t))$.

Вместе с тем существует схема получения параметрических уравнений галилеевой кривой по ее натуральным уравнениям (15) [5].

2. Ускорение движения точки

2.1. Касательное и нормальное ускорение

Если векторная функция (2) $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ задает закон движения материальной точки, то вектор (4)

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

есть вектор скорости движения точки, и вектор (5)

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$$

является вектором ускорения движения.

Для мировой линии движения (3)

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t))\,,$$

кривизна равна величине ускорения

$$k = a = \|\ddot{\vec{r}}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}\,,$$

см. (7). По [3, с. 59–61] каппа-функция вектора $\ddot{\vec{r}}(t)$ согласно (14) такова:

$$\kappa(\ddot{\vec{r}}) = m = \frac{\ddot{x}\quad \dddot{y} - \dddot{x}\quad \ddot{y}}{k^2}\,.$$

Определение каппа-функции $\kappa(\vec{u})$ евклидова вектора $\vec{u}$ и формула для вычисления каппа-функции приведены ниже в процессе доказательства леммы 1.

Пусть τ – единичный вектор касательной к мировой линии движения $\gamma(t)$. По (12)

$$\tau = \dot{\gamma} = \vec{e} + \dot{\vec{r}}\,,$$

$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ есть вектор касательной к траектории движения, его величина по (5):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,.$$

Через $\vec{n}$ обозначается единичный вектор нормали траектории. Он может быть найден как единичный вектор направления нормали траектории. Из евклидовой дифференциальной геометрии известно, что вектор нормали находится в результате дифференцирования единичного вектора касательной, т.е. вектора

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} = \vec{t} \ . \tag{22}$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ движения лежит в плоскости движения и может быть разложен по векторам сопровождающего репера траектории $(P, \vec{t}, \vec{n})$, где P – движущаяся точка траектории; запишем это разложение, введя обозначения коэффициентов разложения:

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n} \ , \tag{23}$$

здесь a_t – тангенциальное (касательное) ускорение; a_n – нормальное ускорение.

При движении точки P по траектории коэффициенты разложения являются функциями времени:

$$a_t = a_t(t), \ a_n = a_n(t) . \tag{24}$$

Для вычисления функций a_t и a_n вектор (23) умножим скалярно последовательно на векторы $\vec{t}$ и $\vec{n}$:

$$\vec{a} \ \vec{t} = \ddot{\vec{r}} \ \vec{t} = a_t ; \ \vec{a} \ \vec{n} = \ddot{\vec{r}} \ \vec{n} = a_n .$$

Произведем вычисления функций (24). Для касательного ускорения (см. (22)) находим

$$a_t = \ddot{\vec{r}} \ \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} = \frac{\dot{x} \ \ \ddot{x} + \dot{y} \ \ \ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} . \tag{25}$$

Согласно [3, с. 59–60]

$$\vec{n} = \left(-\frac{\dot{y}}{\|\dot{\vec{r}}\|}, \frac{\dot{x}}{\|\dot{\vec{r}}\|} \right).$$

Для нормального ускорения получаем

$$a_n = \ddot{\vec{r}} \ \vec{n} = \frac{-\dot{y} \ \ \ddot{x} + \dot{x} \ \ \ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} . \tag{26}$$

Лемма 1. *Функция касательного ускорения движущейся точки равна производной по времени величины (модуля) скорости движения*:

$$a_t(t) = \frac{d}{dt} \ \|\vec{v}(t)\| .$$

Функция нормального ускорения движущейся точки равна произведению скорости движения и каппа-функции вектора скорости:

$$a_n(t) = v(t) \kappa(\vec{v}(t)) . \tag{27}$$

Вычислим производную по времени величины скорости движения (5):

$$\frac{d}{dt}\|\vec{v}\| = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ \ddot{x} + 2\dot{y}\ \ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = a_t, \qquad (28)$$

см. формулу (25).

С учетом [3, с. 59–60] для произвольного вектора $\vec{u}$ его каппа-функция $\text{к}(\vec{u})$ определяется из равенства

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = \text{к}(\vec{u})\vec{g},$$

где $\vec{g}$ – единичный вектор, и если $\vec{u} = (u^1, u^2)$, то

$$\text{к}(\vec{u}) = \frac{u^1 u'^2 - u^2 u'^1}{\|\vec{u}\|^2}. \qquad (29)$$

Действительно, единичный вектор направления $\vec{u}$ равен

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{u^1}{\|\vec{u}\|}, \frac{u^2}{\|\vec{u}\|}\right).$$

Находим производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^1}{\|\vec{u}\|}, \frac{u^2}{\|\vec{u}\|}\right) = \left(\frac{u'^1\|\vec{u}\| - u^1\|\vec{u}\|'}{\|\vec{u}\|^2}, \frac{u'^2\|\vec{u}\| - u^2\|\vec{u}\|'}{\|\vec{u}\|^2}\right).$$

Так как $\frac{d}{dt}\|\vec{u}\| = \frac{u^1 u'^1 + u^2 u'^2}{\|\vec{u}\|}$ (см. (28)), то для первой компоненты вектора $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ имеем равенства

$$\frac{u'^1\|\vec{u}\| - u^1\|\vec{u}\|'}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{u'^1\|\vec{u}\| - u^1\dfrac{u^1 u'^1 + u^2 u'^2}{\|\vec{u}\|}}{\|\vec{u}\|^2} =$$

$$= \frac{u'^1((u^1)^2 + (u^2)^2) - u^1(u^1 u'^1 + u^2 u'^2)}{\|\vec{u}\|^3} = -\frac{u^1 u'^2 - u^2 u'^1}{\|\vec{u}\|^2}\ \frac{u^2}{\|\vec{u}\|}.$$

Точно так же для второй компоненты вектора $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ находим

$$\frac{u'^2\|\vec{u}\| - u^2\|\vec{u}\|'}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{u^1 u'^2 - u^2 u'^1}{\|\vec{u}\|^2}\ \frac{u^1}{\|\vec{u}\|}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)=\frac{u^1u'^2-u^2u'^1}{\|\vec{u}\|^2}\left(-\frac{u^2}{\|\vec{u}\|},\frac{u^1}{\|\vec{u}\|}\right).$$

Вектор $\left(-\frac{u^2}{\|\vec{u}\|},\frac{u^1}{\|\vec{u}\|}\right)$ является единичным. Согласно определению каппа-функции вектора $\vec{u}$ имеем выражение (29). Сравнивая формулы (26) и (29), приходим к равенству (27). #

2.2. Получение уравнений траектории движения точки по касательному и нормальному ускорениям методами евклидовой геометрии

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Касательное a_t ускорение движущейся точки и нормальное a_n ускорение точки определяют кривизну k^e траектории $\vec{r}(t)$ движущейся точки*:

$$k^e(t)=\frac{|a_n(t)|}{v^2(t)},\ v(t)=\int a_t(t)dt\ . \tag{30}$$

Равенство (28)

$$\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|=a_t$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $v(t)$ и заданной функцией $a_t=a_t(t)$. Общий интеграл этого уравнения:

$$v(t)=\int a_t(t)dt\ .$$

Теперь из второй формулы (9) находим выражение кривизны k^e траектории движения в первом равенстве в (30). #

Начальные условия $t=t_0$, $v(t_0)=v_0$ определяют значение кривизны $k^e=k^e(t_0)$ траектории в момент времени $t=t_0$.

Теперь на основании леммы 2 устанавливается

Теорема 1. *Заданные функции $a_t(t)$ касательного ускорения движения точки и $a_n(t)$ нормального ускорения движения точки с двумя степенями свободы определяют с точностью до положения на плоскости уравнения траектории $\vec{r}(t)$ движущейся точки.*

По лемме 2 заданные функции $a_t(t)$ и $a_n(t)$ определяют функцию кривизны $k^e(t)$ траектории движения $\vec{r}(t)$. Для получения конкретной функции $k^e(t)$ при решении дифференциального уравнения $\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|=a_t$ нужно задать начальные условия. В евклидовой дифференциальной геометрии параметрические уравнения плоской кривой $\vec{r}(t)$ функцией ее кривизны $k^e(t)$

определяются однозначно при выбранных начальных условиях [6, с. 137–143, 205]. В этом случае начальные условия состоят в задании точки на кривой и касательного вектора к кривой в заданной точке. #

Поставленная задача нахождения траектории движения точки по касательному и нормальному ускорениям точки решается выше методами евклидовой дифференциальной геометрии.

2.3. Использование методов геометрии Галилея

Рассмотренную задачу решим еще методами геометрии Галилея.

Лемма 3. *Касательное и нормальное* a_t, a_n *ускорения точки определяют кривизну* k *и кручение* m *мировой линии* $\gamma(t)$ *движущейся точки*:

$$k=\sqrt{a_t^2+a_n^2}\ ,\ m^2=k^e k\ . \tag{31}$$

Разложения (8) и (23) записаны по единичным взаимно перпендикулярным векторам, $k=\left\|\ddot{\vec{r}}\right\|$, поэтому с учетом (13) имеем $k=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$. Кривизна k, кручение m мировой линии $\gamma(t)$ движущейся точки и кривизна k^e траектории движения точки связаны соотношением $m^2=k^e k$ (см. [3, с. 67]).

Теорема 2. *Заданные функции касательного и нормального ускорений движения материальной точки с двумя степенями свободы определяют с точностью до положения в пространстве-времени Галилея мировую линию и траекторию точки в координатной форме*.

Для получения функций $x=x(t), y=y(t)$, являющихся компонентами координатного задания траектории движения $\vec{r}(t)$, используется система дифференциальных уравнений (16) (см. [4]), схема решения которой изложена в п. 1.3. По заданным функциям $a_t=a_t(t)$, $a_n=a_n(t)$ согласно (31) и (30) находим функции $k=k(t)$ и $m^2=m^2(t)$. Рассматриваем два случая:

$$m_1=+\sqrt{k^e k}\ \text{ и }\ m_2=-\sqrt{k^e k}\ .$$

В каждом случае методами из [4] (см. п. 1.3) находим компоненты галилеевой кривой $\gamma(t)$ $x_1=x_1(t), y_1=y_1(t)$, соответствующие значению m_1, и компоненты $x_2=x_2(t), y_2=y_2(t)$, соответствующие значению m_2. Затем, основываясь на формуле (14) в каждом случае, находим функцию $\kappa(\vec{v}(t))$. В каком случае (m_1 или m_2) получается совпадение $a_n(t)=v(t)\ \kappa(\vec{v}(t))$, тот случай и определяет кривую $\gamma(t)=(t,x(t),y(t))$. #

Задача отыскания уравнений траектории движущейся точки по касательному и нормальному ускорениям не совпадает с задачей отыскания уравнений траектории по полю ускорения движения точки. Решение первой из них сводится к получению векторного уравнения траектории $\vec{r}(s)$ по скалярному натуральному уравнению кривой $k^e=k^e(t)$, s – естественный параметр. Во втором случае даны функции $a^1(t), a^2(t)$ – компоненты вектора ускорения $\vec{a}(t)$ движения точки, и компоненты $x(t), y(t)$ траектории движения точки отыскиваются как решения дифференциальных уравнений $x''(t)=a^1(t)$,

$y''(t) = a^2(t)$. Такой метод решения задачи обосновывается средствами геометрии Галилея.

С другой стороны, функции касательного и нормального ускорений можно рассматривать как составляющие векторного поля ускорений движущейся точки. Это поле может быть специфическим, приводящим к естественному описанию кривой; в этом случае положение точки на траектории является функцией длины пройденного точкой пути (у Рашевского П. К. по функции кривизны $k(s)$, где s – длина дуги, кривая отыскивается в естественной параметризации $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ [6, с. 139–143]). При задании поля ускорения движения точки во времени желательно описать и движение во времени, т.е. описать движение функцией времени в так называемом координатном задании. Если касательное и нормальное ускорения заданы как функции времени, то траектория $\vec{r}(t)$ движения получается в результате интегрирования дифференциальных уравнений $x''(t) = a_t(t), y''(t) = a_n(t)$.

Список литературы

1. **Молотников, В. Я.** Основы теоретической механики / В. Я. Молотников. – Ростов н/Д : Феникс, 2004. – 384 с.
2. **Арнольд, В. И.** Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
3. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств : монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2005. – 306 с.
4. **Долгарев, А. И.** Методы одулярной галилеевой геометрии в описании механических движений / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 12–24.
5. **Долгарев, А. И.** Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости / А. И. Долгарев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : межвуз. тем. сб. научн. тр. – Вып. 33. – Калиниград : Изд-во КГУ, 2002. – С. 25–28.
6. **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956. – 420 с.

Долгарев Артур Иванович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

Dolgarev Artur Ivanovich
Candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 514 + 531

Долгарев, А. И.

Получение уравнений траектории движущейся точки по функциям тангенциального и нормального ускорения / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 52–63.